

Gruppenübung 9

Aufgabe 1 Wir betrachten im folgenden die Menge der Strecken

$$\Pi := \left\{ G \text{ Übertragungsfunktion} \mid G(s) = \frac{c}{Ts+1}, c \in [1,3], T \in [1.5,4.5] \right\}.$$

Sei $G(s) := \frac{2}{3s+1}$ das nominelle Modell.

- a) Zeichnen Sie das Bodediagramm für das nominelle System. Überlegen Sie sich welchen Einfluß die Änderung der Parameter auf das Bodediagramm haben.

Lösung:

Siehe Abbildung 1.

Eine Vergrößerung des Parameters c bewirkt eine Verschiebung des Amplitudenganges nach oben, eine Vergrößerung von T eine Verschiebung sowohl des Amplituden, als auch des Phasenganges nach links.

- b) Angenommen wir wollen das System mit einem allgemeinen Regler K gemäß der Regelkreisstruktur aus Abbildung 2 regeln. Bestimmen Sie für das nominelle System ein Signalflussplan (auch Blockschaltbild genannt), das diesen Regelkreis beschreibt.

Lösung:

Für eine Beispiellösung siehe Abbildung 3, wobei für das Nominelle System $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ gilt. Beachten Sie, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, die Übertragungsfunktion als Signalflussplan darzustellen. Eine alternative Lösung ist in Abbildung 4 dargestellt.

- c) Zeichnen Sie in den Signalflussplan zwei Unsicherheitsblöcke Δ_1 und Δ_2 für die Unsicherheit in c und in T ein. Wir bezeichnen den Eingang des Unsicherheitsblockes Δ_1 mit z_1 und den Ausgang mit w_1 . Analog bezeichnen wir den Eingang des Unsicherheitsblockes Δ_2 mit z_2 und den Ausgang mit w_2 . Achten Sie darauf, die Unsicherheiten so zu normieren, dass die Menge aller Systeme durch

$$|\Delta_1| \leq 1, |\Delta_2| \leq 1$$

beschrieben ist. **Lösung:**

Siehe Abbildung 3.

- d) Stellen Sie die Übertragungsfunktion von $w := [w_1, w_2]^T$ nach $z := [z_1, z_2]^T$ auf.

Lösung:

Zuerst wählt man ein Hilffsignal um die Rückführung zu beschreiben. Wir wählen y wie in Abbildung 3.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} y &= w_1 - 2Ky - s(w_2 + 3y) \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{1+2K+3s} w_1 - \frac{s}{1+2K+3s} w_2. \end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass sich je nach gewählter Struktur andere Übertragungsfunktionen ergeben können. Der Grund dafür ist, dass die Bedeutung der Variablen z und w nicht eindeutig ist: In der Beispiellösung gilt $z_2 = 1.5y$. Das Vertauschen des Δ_2 -Blocks und des 1.5-Blocks ändert das System nicht. Allerdings gilt nach dem Vertauschen $z_2 = y$. Für die alternative Lösung in Abbildung 4 gilt $z_2 = 0.5sy$.

Mit der Struktur wie in Abbildung 3 ergibt sich für z_1 und z_2

$$\begin{aligned} z_1 &= -Ky = \frac{-K}{1+2K+3s} w_1 + \frac{Ks}{1+2K+3s} w_2 \\ z_2 &= 1.5y = \frac{1.5}{1+2K+3s} w_1 - \frac{1.5s}{1+2K+3s} w_2, \end{aligned}$$

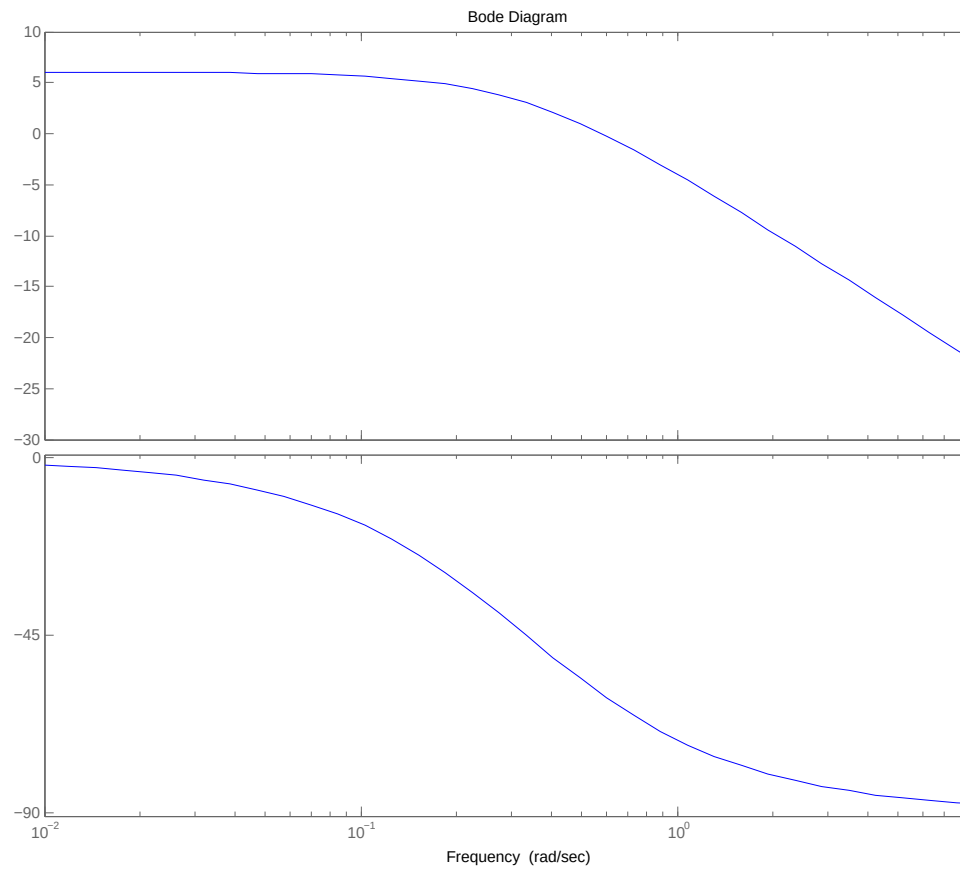


Abbildung 1: Bodediagramm des nominellen Systems

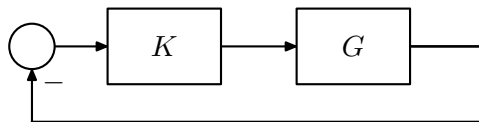


Abbildung 2: Regelkreis

und damit

$$z = \begin{bmatrix} \frac{-K}{1+2K+3s} & \frac{Ks}{1+2K+3s} \\ \frac{1.5}{1+2K+3s} & \frac{-1.5s}{1+2K+3s} \end{bmatrix} w.$$

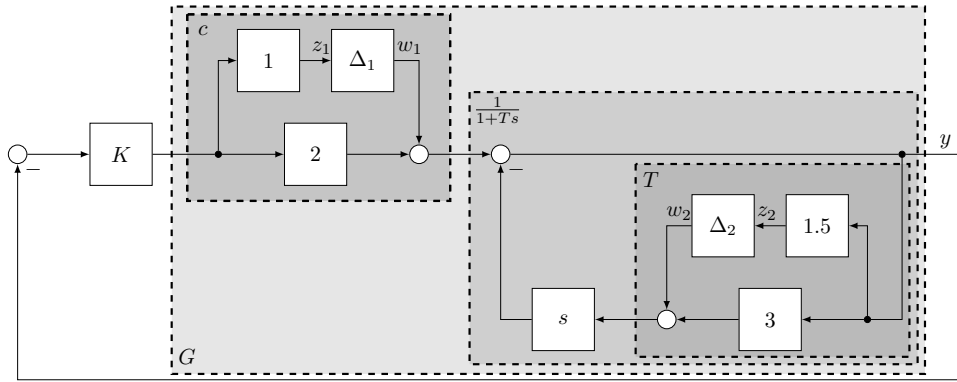


Abbildung 3: Lösung zur Aufgabe 1b)

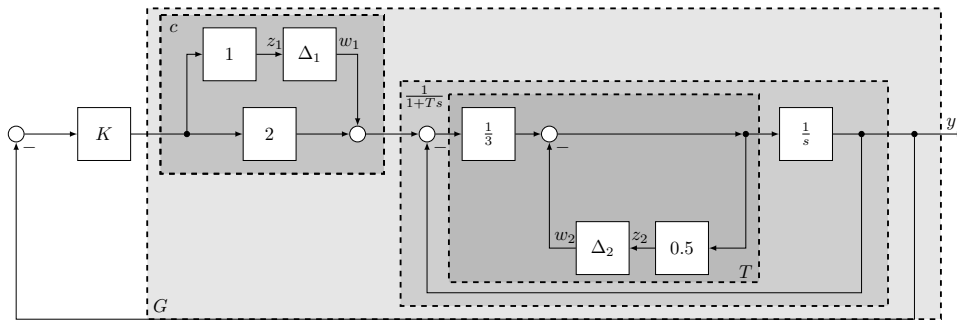


Abbildung 4: Alternative Lösung zur Aufgabe 1b)

Mit der alternativen Lösung aus Abbildung 4 ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-K}{1+2K+3s} w_1 + \frac{3K}{1+2K+3s} w_2 \\ z_2 &= \frac{0.5s}{1+2K+3s} w_1 - \frac{1.5s}{1+2K+3s} w_2. \end{aligned}$$

e) Wie sieht die M - Δ -Struktur des Systems aus?

Lösung:

M ist die Übertragungsfunktion von $w := [w_1, w_2]^T$ nach $z := [z_1, z_2]^T$. Damit gilt für die Struktur aus Abbildung 3

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-K}{1+2K+3s} & \frac{3K}{1+2K+3s} \\ \frac{0.5s}{1+2K+3s} & \frac{-1.5s}{1+2K+3s} \end{bmatrix}$$

und das System hat die Struktur wie in Abbildung 5 dargestellt.

Aufgabe 2 Im folgenden soll das Nyquistkriterium verwendet werden um die robuste Stabilität eines Regelkreises zu untersuchen. Dazu betrachten wir den Regelkreis aus Abbildung 6. Dabei ist G das gegebene nominelle System, w_I ist eine gegebene Gewichtsfunktion und Δ ist eine Übertragungsfunktion die für alle ω die Bedingung $|\Delta(j\omega)| \leq 1$ erfüllt, also $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1$. Wir bezeichnen mit L die Übertragungsfunktion des nominellen offenen Kreises, d.h. $L = GK$. Mit G_p bezeichnen wir ein beliebiges System aus der Menge der möglichen Systeme Π . Wir nehmen an, dass sowohl K als auch alle Systeme in Π asymptotisch stabil sind.

Wir wollen die robuste Stabilität des geschlossenen Kreises mit Hilfe des Nyquistkriteriums charakterisieren. Dazu betrachten wir die Übertragungsfunktion des offenen Kreises $L_p = KG_p$ für die gilt

$$L_p = G_p K = GK(1 + w_I \Delta) = L + w_I L \Delta.$$

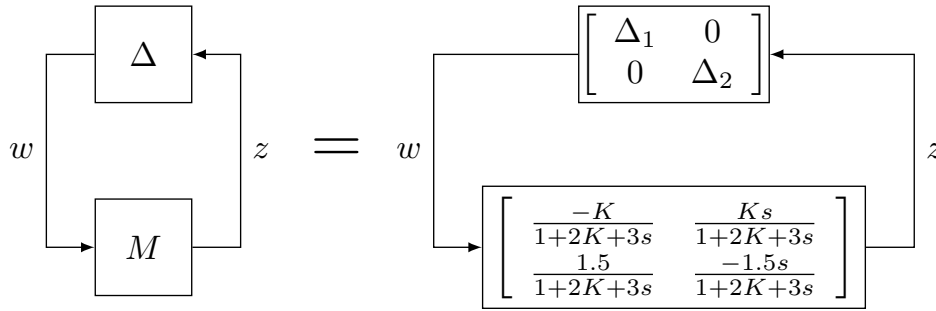


Abbildung 5: System in M-Δ-Struktur

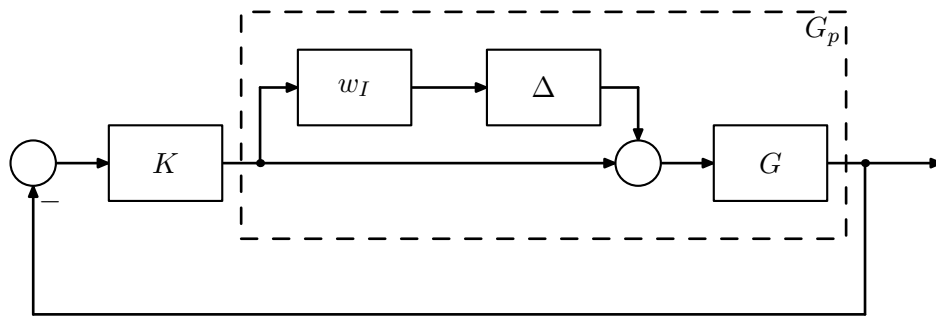


Abbildung 6: Regelkreis mit multiplikativer Unsicherheit.

- a) Überlegen Sie sich wie mit dem Nyquistkriterium im vorliegenden Fall die Stabilität überprüft werden kann. Wie können wir die Bedingung aus dem Nyquistkriterium in eine mathematische Bedingung an die Systeme aus Π umformulieren? Überlegen Sie sich dazu in welcher Menge die Systeme in Π für eine feste Frequenz ω liegen.

Lösung:

Da das nominelle System zur Menge Π der möglichen Systeme gehört, ist die Stabilität des nominellen Regelkreises notwendig für die robuste Stabilität. Weil wir annehmen, dass alle Systeme aus Π asymptotisch stabil sind und der Regler K auch asymptotisch stabil ist, ist es notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises dass die Ortskurve des offenen Kreises L_p den kritischen Punkt nicht umschlingt. D.h. der Abstand der Ortskurve von L_p vom kritischen Punkt ist ausschlaggebend. Für eine feste Frequenz ω liegen alle Systeme in Π in einem Kreis um $L(j\omega)$ mit Radius $|w_I(j\omega)L(j\omega)|$. Damit gilt es für alle Frequenzen den Abstand $|1 + L|$ des Punktes $L(j\omega)$ vom kritischen Punkt -1 größer als $|w_I(j\omega)L(j\omega)|$ zu halten, vergleiche Abbildung 7.

D.h. notwendig und hinreichend für die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises ist

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : |w_I(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|,$$

die Stabilität des nominellen Regelkreises vorausgesetzt.

- b) Aus dem Aufgabenteil a) wissen wir, dass, die Stabilität des nominellen Regelkreises vorausgesetzt, für die robuste Stabilität der Systeme die Bedingung

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : |w_I(j\omega)L(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|$$

notwendig und hinreichend ist. Leiten Sie daraus eine notwendige und hinreichende Bedingung für die komplementäre Sensitivität T des nominellen Systems her, welche die robuste Stabilität des geschlossenen Kreises garantiert.

Lösung:

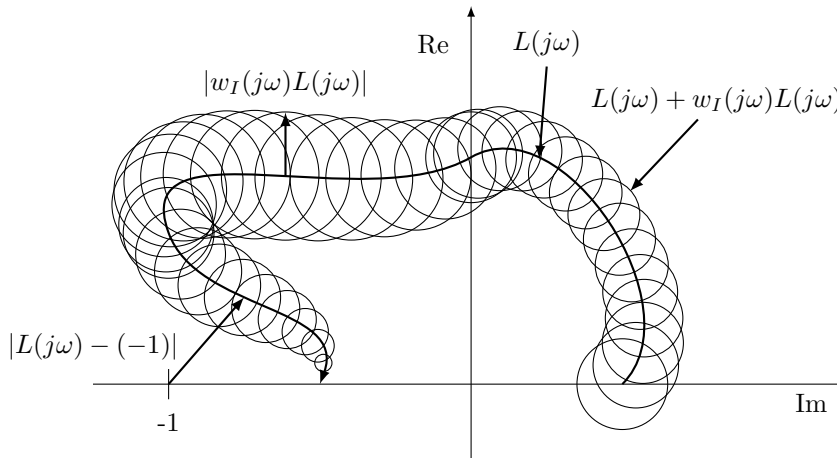


Abbildung 7: Nyquistdiagram für $L + w_I L \Delta$

$$\begin{aligned}
 \forall \omega \in \mathbb{R} : |w_I(j\omega)L(j\omega)| &< |1 + L(j\omega)| \\
 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} : \left| \frac{w_I(j\omega)L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| &< 1 \\
 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} : |w_I(j\omega)T(j\omega)| &< 1 \\
 \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} : |T(j\omega)| &< \frac{1}{|w_I(j\omega)|} \\
 \Leftrightarrow \|w_I T\|_\infty &< 1
 \end{aligned}$$

Anmerkung: außerdem gilt

$$\|T\|_\infty < \frac{1}{\|w_I\|_\infty} \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} : \|T\|_\infty < \frac{1}{|w_I(j\omega)|} \Rightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} : |T(j\omega)| < \frac{1}{|w_I(j\omega)|}.$$

Diese Bedingung ist aber nur hinreichend für robuste Stabilität! Der Grund dafür ist, dass bei den Normen in $\|T\|_\infty$ und $\|w_I\|_\infty$ der maximale Wert jeweils bei einer anderen Frequenz liegen kann. Bei $\|w_I T\|_\infty$ muss aber eine gemeinsame Frequenz gefunden werden, für die der Ausdruck maximal wird.

c) Betrachten Sie nun die folgende nominelle Strecke

$$G(s) = \frac{3(-2s+1)}{(5s+1)(10s+1)}$$

mit dem Regler

$$K(s) = K_c \frac{12.7s+1}{12.7s}$$

und der Gewichtsfunktion

$$w_I(s) = \frac{10s+0.33}{(10/5.25)s+1}.$$

Sei $K_c = 1.13$. In Abbildung 8 wird der Amplitudengang und der Phasengang der komplementären Sensitivität T (gepunktet) und von $1/w_I$ (gestrichelt) abgebildet. Entscheiden Sie anhand der Abbildung ob das System robust stabil ist. Was würden Sie vorschlagen um robuste Stabilität zu erreichen?

Lösung:

Die gepunktete Linie ist größer als die gestrichelte im Bereich zwischen 0.1 und 0.8, damit ist das System nach Teilaufgabe b) nicht robust stabil. Um das System robust stabil zu machen muss man K_c kleiner machen.

Aufgabe 3 Gegeben sei die folgende nominelle Strecke:

$$G(s) = \frac{1-s}{(0.1s+1)(s+1)}$$

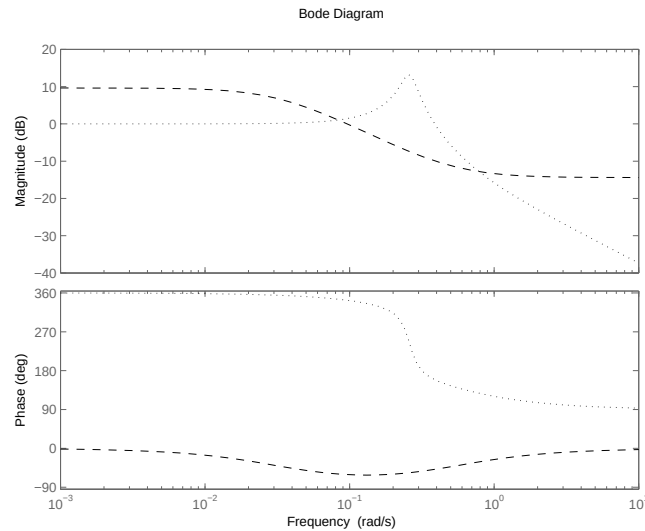


Abbildung 8: Bodediagramm des Beispielsystem.

und der folgende PI-Regler:

$$K(s) = 0.4 \frac{s+1}{s}$$

- a) Überprüfen Sie die Stabilität des geschlossenen nominellen Kreises sowohl graphisch als auch rechnerisch. Kann man das “small-gain theorem” im vorliegenden Fall anwenden?

Lösung:

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises ist gegeben durch

$$G_{cl}(s) = \frac{-4s+4}{s^2+6s+4}.$$

Aus der Vorzeichenbedingung folgt, dass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist.

Graphisch betrachtet man das Bode- bzw. das Nyquistdiagramm (siehe Abbildung 9 und Abbildung 10). Weil die Übertragungsfunktion $G_0 := GK$ des offenen Kreises durch

$$G_0(s) = \frac{-4s+4}{s^2+10s}$$

gegeben ist, benötigen wir nach dem Nyquistkriterium eine Phasendrehung von $\frac{\pi}{2}$. Dies ist erfüllt und damit ist der geschlossene nominelle Kreis stabil. Weil der offene Kreis nicht asymptotisch stabil ist kann das “small gain Theorem” nicht angewendet werden.

- b) Im folgenden soll die Robustheit des geregelten Kreises bei einer multiplikativen Ausgangsunsicherheit $\Delta_M(s)$ mit $\|\Delta_M\|_\infty \leq l_M(\omega)$ betrachtet werden. Die Funktion $l_M(\omega)$ sei gegeben durch:

$$l_M(\omega) = \begin{cases} -5[\text{dB}] & \omega \leq 1[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] \\ \text{Gerade zwischen } -5[\text{dB}] \text{ und } 15[\text{dB}] & 1[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] < \omega < 100[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] \\ 15[\text{dB}] & \omega \geq 100[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] \end{cases} \quad (1)$$

Ist der geschlossene Kreis robust stabil? Verwenden Sie den Plot von $\left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \right|$ in Abbildung 11.

Lösung:

Ein System ist robust stabil bezüglich multiplikativer Ausgangsunsicherheit, wenn

$$\forall \omega : |T(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \right| < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad (2)$$

In Abbildung 12 ist der Betrag der komplementären Sensitivität $|T(j\omega)|$ für den gegebenen Regel-

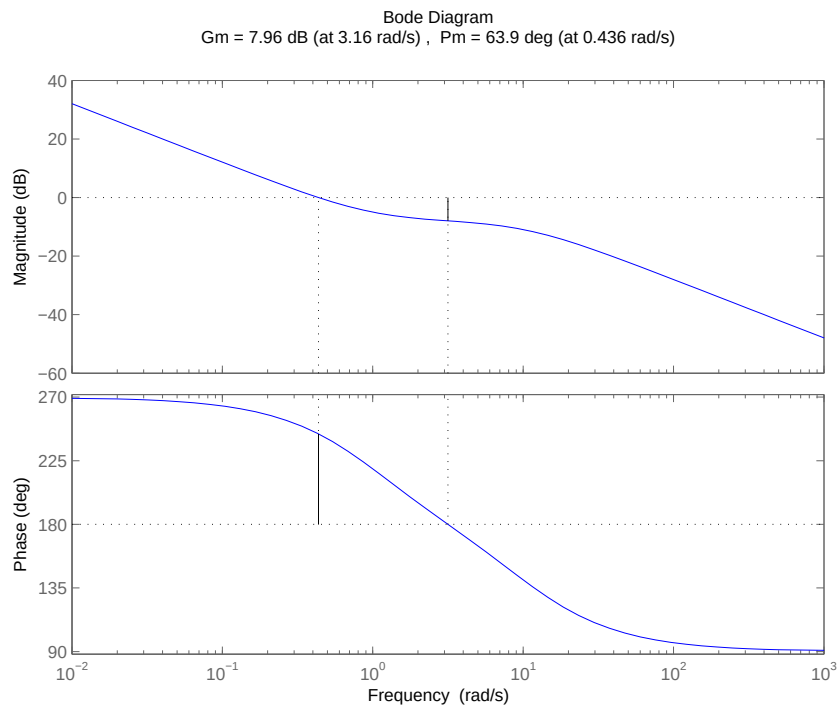


Abbildung 9: Bodediagramm des nominellen offenen Kreises G_0 .

kreis (gestrichelte Linie) und die Inverse von $l_M(\omega)$ (durchgezogene Linie) dargestellt. Dies zeigt, dass robuste Stabilität vorliegt.

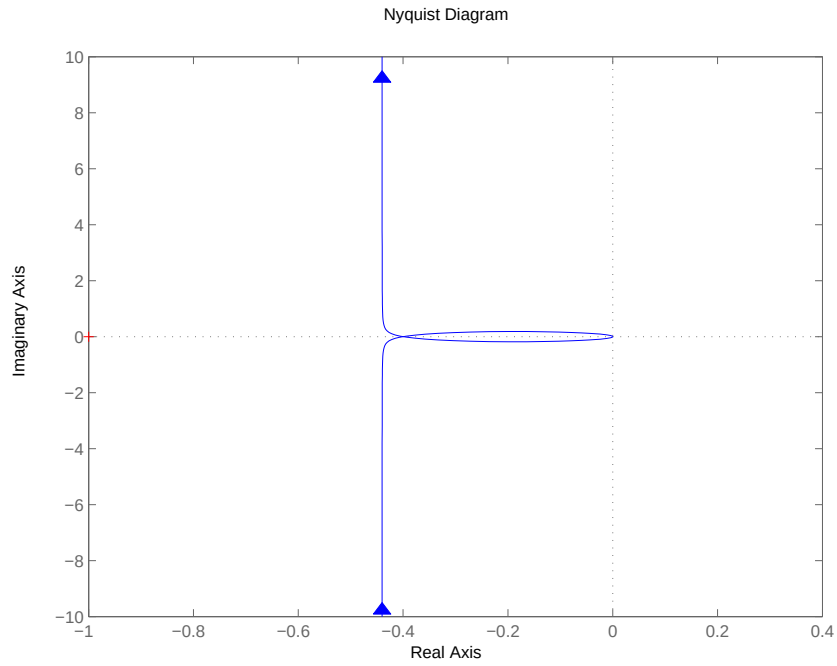


Abbildung 10: Nyquistdiagramm der nominellen Strecke.

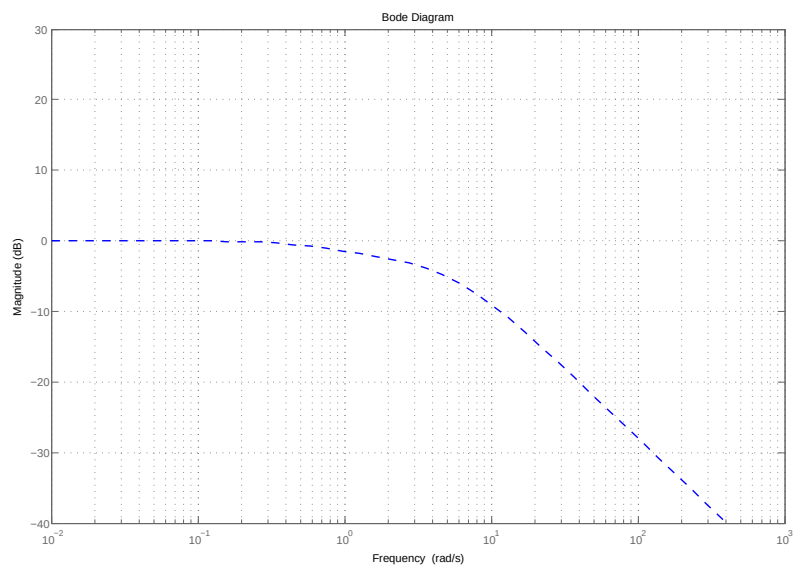


Abbildung 11: Amplitudengang von $\left| \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \right|$ des nominellen Regelkreises.

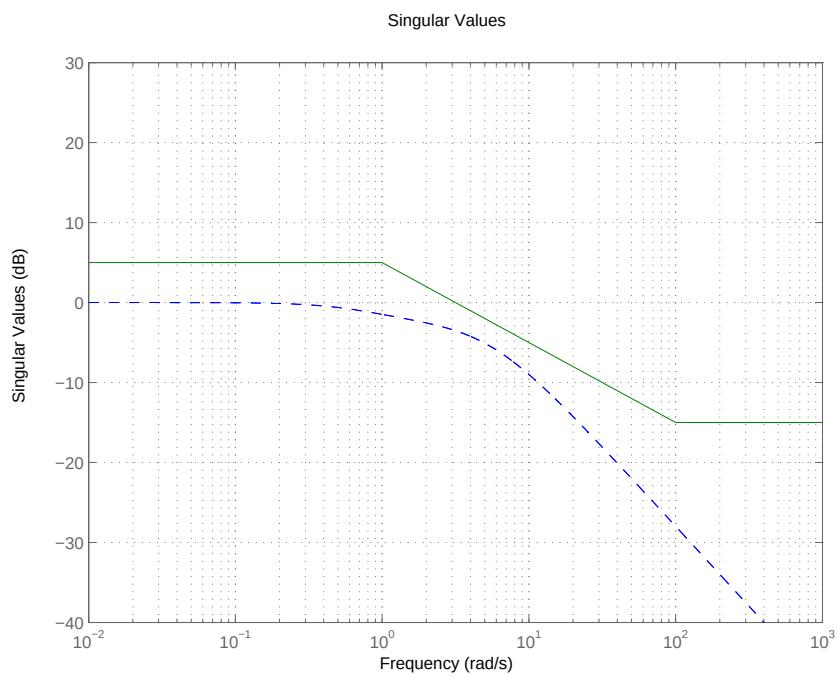


Abbildung 12: Amplitudengang der komplementären Sensitivität $|T(j\omega)|$ des nominellen Regelkreises und $\frac{1}{l_M(\omega)}$.